6次元球面内の4次元CR部分多様体について (等質空間と部分多様体の幾何学)

橋本, 英哉; 間下, 克哉; 関川, 浩永

数理解析研究所講究録
1044 巻 1998 年 4-12

6 次元球面内の 4 次元 CR 部分多様体について

日本工業大学・橋本　英哉　(Hideya Hashimoto)
東京農工大学・間下　克哉　(Katsuya Mashimo)
新潟大学・関川　浩永　(Kouei Sekigawa)

1　序

7 次元ユークリッド空間を純虚ケーリー代数と同一視する。この時、その代数的構造により 6 次元球面 S^6には、概エルミート構造が存在する。特に、この概エルミート構造は、等質なものであり、その自己同型群は例外型単純リー群 G_2と一致し、等質空間としての表示 $S^6 = G_2/SU(3)$ を持つ。S^6の等長変換群は $SO(7)$ であるから構造群の縮小が大きい。また、球面の中で概複素構造を持つものは、2 次元球面と 6 次元球面に限られることが知られている。2 次元球面は、複素 1 次元射影空間 $P^1(C)$ と同一視することによって得られ、$P^1(C)$ の正則等長変換群は、$SU(2)$ となる。一方、2 次元球面の等長変換群は $SO(3)$ だから次元の差は無い。しかしながら、2 次元球面と 6 次元球面の概複素構造は、それぞれ、3 次元ユークリッド空間、7 次元ユークリッド空間の外積の構造を用いて定義されていることは興味深い事実であろう。

我々の研究の一つの目的は、接束の構造群が縮小し、例外型リー群に関連した幾何学に興味がある。また、最近のグラスマン幾何学の一つの良い例になると思われる。この立場に立って、部分多様体との関連から、特に 4 次元 CR-部分多様体について現在までに得た結果について述べたい。

6 次元球面の 4 次元部分多様体について知られている結果は、次のものである。

(1) 6 次元球面の 4 次元概複素部分多様体は存在しない。([Gr])

(2) 6 次元球面の 4 次元 CR-product 部分多様体は存在しない。([Se2])

基本的な問題として、6 次元球面の 4 次元 CR-部分多様体は存在するか。は、残されていた問題であった。この問題に関しても得られた結果について述べる。

2 準備

6 次元球面の概複素構造を記述する。ImOでケーリー代数 O内の純虚数部分を表す。ケーリー代数 Oは。四元数 Q の 2 個の組と同一視できる。この同一視を用いると積構造は次の式で与えられる。

$$(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)=(ac-\bar{d}b)+(da+b\bar{c})\varepsilon.$$

ここに、a,b,c,d は四元数を表し$\varepsilon=(0,1)\in Q\oplus Q$。この積に関して、ケーリー代数は非可換、非結合的、alternative な division algebra となる。特に、非可換性より外積$\times$が定義できる；$x\times y=\frac{1}{2}(\bar{y}x-\bar{x}y)$. 特に、$x,y\in ImO$ であり、かつ、x と yが直交しているとき $x\times y=xy$となる。

次に 6 次元球面上の概複素構造 Jを次の様に定義する。$X\in T_xS^6$に対して $JX=X\times x$ と定義すると $J^2=-I$を満たし、かつ、induced metric に適合して、$(S^6,J,<\ ,\ >)$ は概エルミート多様体となる。自己同型群

$$Aut(S^6,J,<\ ,\ >)=\{f:S^6\to S^6|f:isometry\ of\ S^6, f_*\circ J_x=J_{f(x)}\circ f_*\}$$

は

$$G_2=\{g\in SO(7)|g(uv)=g(u)g(v)\ for\ any\ u,v\in ImO\}$$

と一致する。

3 4 次元 CR 部分多様体の基本的な性質

最初に 4 次元 CR 部分多様体の定義を述べる。$\varphi:M^4\to S^6$を 6 次元球面内の可符号 4 次元部分多様体とする。

定義 1. $\varphi:M^4\to S^6$が CR-部分多様体 (or φ が CR-map) であるとは

(1) 接束 TM^4が 2 つの 2 次元部分束に分解できる。即ち、$TM^4=H\oplus H^\perp$となり、$\dim H=\dim H^\perp=2$、を満たす。

(2) HはS^6の概複素構造に関して不変であり、$H^\perp$はS^6の概複素構造に関して全実となる。即ち$JH = H, J(H^\perp) = T^\perp M^4$を満たす。

なる2条件を満たす場合をいう。

S^6上の標準的2-formΩを

$$\Omega(X,Y) = < JX, Y >$$

とする。ここにX, YはS^6の接ベクトルである。この時、6次元球面内の可符号4次元部分多様体がCR-部分多様体となる条件は次で与えられる。

命題 2. $\varphi : M^4 \to S^6$がCR-部分多様体となることと次の条件は同値である。

(1) $\Omega(\nu_1, \nu_2) = 0$ ここに、ν_1, ν_2は$T^\perp M^4$の正規直交枠である。

(2) $*\Omega(TM^4) = 0.$, ここに$*$はHodge $*$-operatorを表す。

上記の命題2より、normal bundleの挙動によりCR-部分多様体であるかどうか判定できる。

注意. $\varphi : M^4 \to S^6$がCR-部分多様体とし、$g \in G_2$ならば$g \circ \varphi$も、また、CR-mapとなる。$h \in SO(7) \setminus G_2$の場合は$h \circ \varphi$は、一般にCR-mapとならない。

次に、CR-部分多様体$\varphi : M^4 \to S^6$が存在すると仮定してそのCR-frame bunldeの性質を見る。$H^\perp$の(local) othonormal frame fieldをξ_1, ξ_2とする。仮定より

$$span_R\{J\xi_1, J\xi_2\} = T^\perp M^4$$

となる。この時、外積

$$\xi_1 \times \xi_2$$

は$H^\perp$の向きにのみ依存し、othonormal frame field ξ_1, ξ_2の取り方には依存しない。また、外積の性質により

$$\xi_1 \times \xi_2, J(\xi_1 \times \xi_2) \in H$$

となる。従って、$\xi_1 \times \xi_2$はM^4上の大域的ベクトル場を定義する。よってHは絶対平行性をもつ。

以上より

$$\{\xi_1 \times \xi_2, J(\xi_1 \times \xi_2), \xi_1, \xi_2\}$$

は M^4の (local) orthonormal frame field となる。これより

命題 3. M^4が compact ならば、その Euler 数は零となる。

命題 3 より 4 次元球面、2 次元球面の 2 個の積、複素 2 次元の射影空間等は、6 次元球面内の 4 次元 CR-部分多様体として実現できない。また、$\dim H^\perp = 2$ であるから $H^\perp$上には自然に概複素構造 J'が存在する。これを用いて M^4上に 2 つの概エルミート構造がある。2 つの概複素構造 J_1, J_2を

$$J_1 = J_H \oplus J', J_2 = J_H \oplus (-J')$$

とおけばよい。ただし J_Hは S^6の概複素構造 Jを Hに制限したものを表す。従って、我々は次の complex line bundle の分解を持つ。

$$TS^6|_{\varphi(M^4)} = H \oplus H^\perp \oplus T^\perp M^4.$$

また、$V = H^\perp \oplus T^\perp M^4$ は S^6の概複素構造 Jに関する、M^4上の C^2 vector bumdle となる。この時、これらの vector bundle の特性類に関して次の性質が成り立つ。

命題 4. (1) $e(H) = c_1(H^{(1,0)}) = 0,$

(2) $p_1(TM^4) = \{c_1(H^{\perp(1,0)})\}^2 = -\{c_1(T^{\perp(1,0)}M^4)\}^2,$

(3) $p_1(V) = 0,$

(4) $c_1(V^{(1,0)}) = 0,$

in $H(M, Z)$. ここに $p_1(*)$ (resp. $c_1(*)$) は、対応するベクトル束の first Pontjagin (resp.Chern) class を表し、$e(*)$ は Euler cass を表す。

系 4.1. Distibution H の一つの leaf N^2 が compact ならば, N^2は 2 次元トーラス位相同型となる。

定理 5. $\varphi : M^4 \to S^6$を CR-部分多様体とする。この時、$p_1(TM^4) = 0$ となる。

証明の方針は、ベクトル束 $V = H^\perp \oplus T^\perp M^4$ の構造群が $Sp(1)$ まで縮小出来ることを示し上記の命題4を用いる。次に、H と $H^\perp$の積分可能性について述べる。6次元球面上の G_2 構造方程式を用いる事により

命題 6. $H^\perp$は積分可能ではない。

が示される。また、ガウス方程式を用いると Hが積分可能の時、各 leaf は S^6 の全測地的部分多様体となる事がわかり、完備性により2次元球面と一致する。これと系4.1により、つぎを得る。

命題 7. $\varphi : M^4 \to S^6$が完備な CR-部分多様体とする。この時 Hは積分可能ではない。

4　4次元 CR-部分多様体の例

上記で述べたように、位相的な性質にはかなりの制限があり、かつ、distributions $H, H^\perp$ は一般に積分可能ではない。しかしながら、次の様な2種類の例を構成できる。

命題 8.　$\gamma : I \to S^2 \subset ImQ$ を純虚四元数 $ImQ \simeq R^3$ 内の二次元球面内の任意の曲線とし、$(q \in)\ S^3 \subset Q$ を四元数内の3次元球面とする。この時、以下に定義される写像$\psi : I \times S^3 \to S^6$ は S^6 内の4次元 CR-部分多様体となる。

$$\psi(t, q) = a\gamma(t) + b\overline{q}\varepsilon$$

ここに a, b は正定数で $a^2 + b^2 = 1$ を満たす。

実際、直交する単位法ベクトル場として

$$\nu_1 = \dot{\gamma}(t) \times \gamma(t)$$

$$\nu_2 = b\gamma(t) - a\overline{q}\varepsilon.$$

が取れる。これより

$$J(\nu_2) = (b\gamma(t) - a\overline{q}\varepsilon) \times (a\gamma(t) + b\overline{q}\varepsilon) = \gamma(t) \times \overline{q}\varepsilon = (\overline{q}\gamma(t))\varepsilon \in Q\varepsilon,$$

であるから$< \nu_1, J(\nu_2) >= 0$ となる。命題2 (1) により命題7が示された。また、対応する CR-frame field は以下の様になる。$H^\perp$の正規直交枠は

$$\psi_*(\xi_1) = J(\nu_1) = \nu_1 \times \psi = -a\dot{\gamma}(t) + b(\dot{\gamma}(t) \times \gamma(t)) \cdot \overline{q}\varepsilon,$$

$$\psi_*(\xi_2) = J(\nu_2) = \gamma(t) \times \overline{q}\varepsilon.$$

となる H の正規直交枠は

$$\psi_*(e_1) = J(\nu_1) \times J(\nu_2) = b\dot{\gamma}(t) + a(\dot{\gamma}(t) \times \gamma(t)) \cdot \overline{q}\varepsilon$$

$$\psi_*(J(e_1)) = (\dot{\gamma}(t)) \cdot \overline{q}\varepsilon$$

となる。

定理 9. 次に定義される写像$\psi_1 : S^1 \times S^3 \to S^6$ は S^6の 4-dimensional CR-部分多様体となる。

$$\psi_1(\theta, q) = a(qi\overline{q}) + b\Big(\tau(\theta)\overline{q}\Big) \cdot \varepsilon,$$

ここに a, b は $a^2 + b^2 = 1$, を満たす正定数、$\tau(\theta) = t\{-\sin(\theta) + \cos(\theta)i\} + s\{\cos(\theta)j + \sin(\theta)k\}$ は $S^3 \subset H$ 内の大円であり t, s は $t^2 + s^2 = 1$ を満たす正定数を表す。

注意. 上記の parameter $\{a, t\} \in (0,1) \times (0,1)$ は上記の写像族 ($U(2)$ から G_2 への表現から構成された S^6の点からの orbit) の orbit 空間になっている。

証明. 写像 ψ_1 による接ベクトルは、次の様に与えられる。

$$\begin{aligned}
\psi_{1*}(\frac{\partial}{\partial\theta}) &= b\Big(\tau'(\theta)\overline{q}\Big) \cdot \varepsilon \\
\psi_{1*}(qi) &= -b\Big(\tau(\theta)i\overline{q}\Big) \cdot \varepsilon \\
\psi_{1*}(qj) &= -2a(qk\overline{q}) - b\Big(\tau(\theta)j\overline{q}\Big) \cdot \varepsilon \\
\psi_{1*}(qk) &= 2a(qj\overline{q}) - b\Big(\tau(\theta)k\overline{q}\Big) \cdot \varepsilon,
\end{aligned}$$

従って、下記の法ベクトル場 ν_1, ν_2 は $T^\perp M^4$ の正規直交枠を与える。

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= b(qi\overline{q}) - a\Big(\tau(\theta)\overline{q}\Big) \cdot \varepsilon \\
\nu_2 &= \frac{1}{\sqrt{1+3a^2}}\Bigg(b(qj\overline{q}) + 2a\Big(\tau(\theta)k\overline{q}\Big) \cdot \varepsilon\Bigg).
\end{aligned}$$

よって

$$J(\nu_1) = \Big(\tau(\theta)i\overline{q}\Big) \cdot \varepsilon.$$

これより $<\nu_1, J(\nu_2)>= 0$ となり命題 2（1）より定理 9 が示された。

これらの幾何学的性質について述べる。

命題 10. $\psi_1 : S^1 \times S^3 \to S^6$ を定理 9 で定義した CR-部分多様体とする。

(1) このはめ込みは、埋め込みではない。実際、 $\psi_1(\theta + \pi, -q) = \psi_1(\theta, q)$ となる。このはめ込みは充満である。

(2) CR-部分多様体 $\psi_1 : S^1 \times S^3 \to S^6$ が極小部分多様体となるための必要十分条件は $a = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{57}}{24}}$、かつ、$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となることである。これ以外の場合、平均曲率ベクトル場の長さは一定であるが、平均曲率ベクトル場は法接続に関して平行ではない。

(3) はめ込みψ_1 の第二基本形式は平行ではない。

(4) はめ込みψ_1 の法曲率は平坦ではない。

(5) はめ込みψ_1 の誘導計量に関するリッチ曲率の固有値は一定であるが、アインシュタイン計量ではない。

注意. 最後に、写像 ψ_1 に関連した G_2 に適合した $S^1 \times S^3$上の正規直交枠を表記する。

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{b} qi, \\
\xi_2 &= \frac{-1}{\sqrt{1+3a^2}} \{ \frac{5-9a^2}{4bst} \Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + (t^2 - s^2) qi \Big) + \frac{3b}{2} qj \}, \\
\tilde{e_1} &= \frac{1}{\sqrt{1+3a^2}} \{ \frac{1-9a^2}{4ast} \Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + (t^2 - s^2) qi \Big) + \frac{1-3a^2}{2a} qj \}, \\
J\tilde{e_1} &= -\frac{1}{\sqrt{1+3a^2}} qk.
\end{aligned}
$$

上記の正規直交枠の写像 ψ_1 に依る像は次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\psi_{1*}(\xi_1) &= -(\tau(\theta) i\overline{q})\varepsilon (= -J\nu_1), \\
\psi_{1*}(\xi_2) &= \frac{-1}{\sqrt{1+3a^2}} \{ -3ab \cdot qk\overline{q} + (1-3a^2)(\tau(\theta) j\overline{q})\varepsilon \} (= -J\nu_2), \\
\psi_{1*}(\tilde{e_1}) &= \frac{1}{\sqrt{1+3a^2}} \{ (3a^2 - 1) \cdot qk\overline{q} - 3ab(\tau(\theta) j\overline{q})\varepsilon \} (= J\nu_1 \times J\nu_2), \\
J\psi_{1*}(\tilde{e_1}) &= \frac{1}{\sqrt{1+3a^2}} \{ 2a \cdot qj\overline{q} - b(\tau(\theta) k\overline{q})\varepsilon \}.
\end{aligned}
$$

参考文献

[Besse] A.L.Besse Einstein manifolds. Spriger-Verlag, 1987.

[Br1] R.L.Bryant. Submanifolds and special structures on the octonians. J. Diff. Geom., 17 (1982) 185-232.

[E1] N.Ejiri. Totally real submanifolds in a 6-sphere. Proc.A.M.S., 83 (1981) 759-763.

[E2] N.Ejiri. Equivariant minimal immersions of S^2 into S^{2m}. Trans.A.M.S., 297 (1986) 105-124.

[F-T1] T.Fukami and S.Ishihara. Almost Hermitian structure on S^6. Tohoku Math J., 7 (1955) 151-156.

[Gray1] A.Gray. Almost complex submanifolds of six sphere. Proc.A.M.S., 20 (1969) 277-279.

[H-L] R.Harvey and H.B.Lawson. Calibrated geometries. Acta Math., 148 (1982) 47-157.

[H1] H.Hashimoto. J-holomorphic curves in a 6-dimensional sphere (to appear)

[H2] H.Hashimoto. Characteristic classes of oriented 6-dimensional submanifolds in the octonians. Kodai Math. J., 17 (1993) 65-73.

[H3] H.Hashimoto. Hypersurfaces in the quaternions;**II**. Tsukuba. J. Math, 13 (1989), 209-224.

[H-M] H.Hashimoto and K.Mashimo. On some 3-dimensional CR submanifolds in S^6 (to appear)

[Hs-L] W-Y.Hsiang and H.B.Lawson. Minimal submanifolds of low cohomogenity. J. Diff. Geom., 5 (1971) 1-38.

[Kob] S. Kobayashi. Differential geometry of complex vector bundles. Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1987.

[M1] K.Mashimo. Homogeneous totally real submanifolds of S^6. Tsukuba J.Math (1985) 185-202.

[M2] K.Mashimo. Minimal immersions of 3-dimensional sphere into spheres. Osaka J.Math. (1984), 721-732.

[M-S] S.Maeda and Y.Shimizu. Imbedding of a complex projective space defined by monomials of same degree. Math.Zeit (1982) 337-344.

[Se1] K.Sekigawa. Almost complex submanifolds of a 6-dimensioanl sphere. Kodai Math.J, 6(1983) 174-185.

[Se2] K.Sekigawa. Some CR-submanifolds in a 6-dimensioanl sphere. Tensor.N.S., 6(1984) 13-20.

[Se3] K.Sekigawa. Notes on homogeneous almost Hermitian manifolds. Hokkaido Math.J, 7(1978) 206-213.

[Si1] Y.Shimizu. On a construction of homogeneous CR-submanifolds in a complex projective space. Commentarii mathematici universitatis sancti pauli, 32 (1983) 203-207.

[Sp] M.Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry **IV**. Publish or Perish., 1975.